Direkte Lineare Transformation (DLT)

In dieser Zusammenfassung werden die Formeln zur Berechnung einer DLT aus verschiedenen Quellen aufgestellt. Dies ist leider nötig, da keine Literaturquelle alle bzw. richtige Formeln darstellt. Fehler, Erweiterung und Verbesserungen werden hier beschrieben.

1.1 Verwendete Literatur

KRAUS, K., 1996: Photogrammetrie, Band 2. 3. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, S.105

LUHMANN, T., 2000: Nahbereichsphotogrammetrie, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, S.235

MIKHAIL, E. et al, 2001: Introduction to Modern Photogrammetry, John Wiley & Sons, Inc., NY USA, Kap. 9.3.2, S. 251

BOPP, H., 1978: Photogrammetric Engeneering and Remote Sensing, Vol. 44, 7-12, S.1191

1.2 Bemerkungen zu den Literaturquellen

Kraus:
- \- mathematische Darstellung unklar und schwer nachvollziehbar, Formel zur Berechnung der Rotationsmatrix falsch.
- \+ Formeln zur Berechnung der Scherung und des Maßstabs des Bildkoordinatensystems vorhanden

Luhmann:
- \- Falsche Formeln zur Berechnung des Projektionszentrums und der Rotationswinkel, Winkelberechnung ohne Angabe der Rotationsmatrix in einem Luftbildfall, ohne Berücksichtigung von Mehrdeutigkeiten.
- \+ Gute Textbeschreibung und eindeutige mathematische Darstellungen.

Mikhail:
- \- Uneindeutige Verwendung des Parameters L, Vorzeichen bei der Rotationsmatrixberechnung stimmt nicht mit der Darstellung von Bopp überein.
- \+ Genaue Beschreibung jedes Elementes der Rotationsmatrix, Übersichtliche mathematische Darstellung.
- ! Achtung: die Spalten- und Zeilenanordnung der Rotationsmatrix M ist gegenüber der in anderen Quellen dargestellten Matrix R vertauscht.

Bopp:
- \- Darstellung etwas unübersichtlich, Vorzeichen bei der Rotationsmatrix-berechnung stimmt nicht mit der Darstellung von Mikhail überein.
- \+ Herleitung der DLT ist beschrieben, Genaue Beschreibung jedes Elementes der Rotationsmatrix
- ! Achtung: die Spalten- und Zeilenanordnung der Rotationsmatrix M ist gegenüber der in anderen Quellen dargestellten Matrix R vertauscht.

2. Voraussetzungen für eine DLT

- 6 räumlich verteilte 3D-Passpunkte im Bild sichtbar
- Die Passpunkte dürfen nicht auf einer im Raum liegenden Ebene oder sehr nahe daran liegen.
- Weiterhin sollten diese Punkte genau genug bestimmt worden sein. Eventuelle Punktfehler werden nicht erkannt und können die DLT erheblich stören!

3. Mathematische Beschreibung

Transformationsgleichung der DLT:

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \qquad y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \qquad (1.1)$$

x, y	gemessene Bildkoordinaten in beliebiger Einheit (Pixel oder Millimeter)
X, Y, Z	3D-Paßpunktkoordinaten (Rechtssystem)
L_1 bis L_{11}	Koeffizienten der DLT

Umstellung der Gleichung:

$$\begin{aligned} L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - xL_9 X - xL_{10} Y - xL_{11} Z = x \\ L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - yL_9 X - yL_{10} Y - yL_{11} Z = y \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Lösung des überbestimmten Gleichungssystems:

$$v = Ax - l \qquad x = (A^T A)^{-1} A^T l \qquad L_1 ... L_{11} = x_1 ... x_{11}$$

$$A_{n,u} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -x_1 Y_1 & -x_1 Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1 X_1 & -y_1 Y_1 & -y_1 Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -x_2 Y_2 & -x_2 Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2 X_2 & -y_2 Y_2 & -y_2 Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_n X_n & -x_n Y_n & -x_n Z_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -y_n X_n & -y_n Y_n & -y_n Z_n \end{bmatrix} \qquad l_{n,1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

(Gleichungen 1.1 bis 1.3 nach LUHMANN)

Hilfswerte:

$$L^2 = L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2$$

$$a^T c = L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11} \qquad b^T c = L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11} \qquad a^T b = L_1 L_5 + L_2 L_6 + L_3 L_7$$

$$a^T a = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \qquad b^T b = L_5^2 + L_6^2 + L_7^2$$

$$abc = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}$$

(L aus MIKHAIL, $a^T c, b^T c, a^T b, a^T a, b^T b, abc$ nach KRAUS) innere Orientierung:

$$x_0 = \frac{a^T c}{L^2} \qquad y_0 = \frac{b^T c}{L^2} \qquad c_x^2 = \frac{a^T a}{L^2} - x_0^2 \qquad c_y^2 = \frac{b^T b}{L^2} - y_0^2 \qquad (1.4)$$

$$d = \frac{(a^T b)L^2 - (a^T c)(b^T c)}{(a^T a)L^2 - (a^T c)^2} \qquad m = -\frac{\det[abc]}{L^3 c_x^2} \qquad (1.5)$$

x_0, y_0	Hauptpunktlage
c_x, c_y	Kamerakonstanten in beiden Achsen des Bildkoordinatensystems
d, m	Scherung und Maßstab der Achsen des Bildkoordinatensystems

(nach KRAUS und MIKHAIL)

Projektionszentrum:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = [abc]^{-1} \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (1.6)$$

(nach KRAUS)

Rotationsmatrix:

Bei der mathematischen Beschreibung der Rotationsmatrix gibt es zwei sich widersprechende Darstellungen in MIKHAIL und BOPP. Die Darstellungen in KRAUS und LUHMANN sind nahezu unbrauchbar und werden nicht verwendet.
Es stellt sich heraus, dass bei MIKHAIL und BOPP verschiedene Vorzeichen für alle Elemente der Rotationsmatrix beschrieben sind. In der praktischen Anwendung hat sich gezeigt, dass sowohl die eine als auch die andere Beschreibung je nach Aufnahmekonfiguration richtig ist. Diese Uneindeutigkeit ist in keiner Quelle beschrieben, und ich habe noch keine Gesetzmäßigkeit herausgefunden, wann und warum das so ist.
Als Abhilfe berechne ich über den Schwerpunkt der in Bild sichtbaren Objektpunkte und dem Projektionszentrum näherungsweise die Nadirdistanz ν und überprüfe das Vorzeichen des entsprechenden Kosinusses mit dem des Elementes r_{33} der Rotationsmatrix. Sind die Vorzeichen ungleich, so wird die Rotationsmatrix mit -1 multipliziert. Im Falle der Nadirdistanz nahe 100 oder 300 [gon] funktioniert das leider nicht, da der Kosinus hier Null wird.

$$r_{13} = \frac{L_9}{L} \qquad r_{23} = \frac{L_{10}}{L} \qquad r_{33} = \frac{L_{11}}{L}$$

$$r_{11} = \frac{x_0 r_{13} - \frac{L_1}{L}}{c_x} \qquad r_{21} = \frac{x_0 r_{23} - \frac{L_2}{L}}{c_x} \qquad r_{31} = \frac{x_0 r_{33} - \frac{L_3}{L}}{c_x} \qquad (1.7)$$

$$r_{12} = \frac{y_0 r_{13} - \frac{L_5}{L}}{c_y} \qquad r_{22} = \frac{y_0 r_{23} - \frac{L_6}{L}}{c_y} \qquad r_{32} = \frac{y_0 r_{33} - \frac{L_7}{L}}{c_y}$$

(nach MIKHAIL)

$$\tan \nu = \frac{S_{Hz}}{dH} \qquad \frac{\cos \nu_M}{|\cos \nu_M|} = \frac{\cos \nu_{\tan}}{|\cos \nu_{\tan}|} \Rightarrow R \qquad \frac{\cos \nu_M}{|\cos \nu_M|} \neq \frac{\cos \nu_{\tan}}{|\cos \nu_{\tan}|} \Rightarrow -R$$

S_{Hz} Horizontalstrecke zwischen dem Schwerpunkt aller im Bild sichtbaren Objektpunkte und dem Projektionszentrum.
dH Höhendifferenz zwischen dem Schwerpunkt aller im Bild sichtbaren Objektpunkte und dem Projektionszentrum.

Achtung!
Die Rotationsmatrix in den Quellen MIKHAIL und BOPP haben gegenüber den Darstellungen in KRAUS oder LUHMANN per Definition vertauschte Zeilen und Spalten.

$$M = R^T \qquad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

M Rotationsmatrix nach MIKHAIL oder BOPP
R Rotationsmatrix nach KRAUS, S.16, $R_{\alpha\nu\kappa}$ oder $R_{\omega\phi\kappa}$

4. Rotationswinkel und Rotationsmatrix

Auch das Problem einer eindeutigen Lösung aus einer Rotationsmatrix Rotationswinkel zu erhalten, kommt in der Literatur etwas zu kurz. Sowohl KRAUS als auch LUHMANN beschreiben die Winkel des Luftbildfalles. Der terrestrische Winkelfall wird nur im KRAUS beschrieben, allerdings in einer mehr als nötigen Mehrdeutigkeit.
Da die Wertebereiche bei allen drei Winkeln von 0 bis 400 [gon] gehen, gibt es bei jeder Aufnahme zwei Möglichkeiten, dieselbe Aufnahmesituation zu beschreiben. Daher bedarf es bei der Rückrechnung aus der Rotationsmatrix eine weitere Bedingung, die die beste Veranschaulichung der Winkel oder Vergleichbarkeit mit anderen Winkelsätzen ermöglicht.

4.1 Terrestrischer Winkelfall

$$R_{\alpha\nu\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\kappa - \sin\alpha\cos\nu\sin\kappa & -\cos\alpha\sin\kappa - \sin\alpha\cos\nu\cos\kappa & \sin\alpha\sin\nu \\ \sin\alpha\cos\kappa + \cos\alpha\cos\nu\sin\kappa & -\sin\alpha\sin\kappa + \cos\alpha\cos\nu\cos\kappa & -\cos\alpha\sin\nu \\ \sin\nu\sin\kappa & \sin\nu\cos\kappa & \cos\nu \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

(aus KRAUS, S.17)

Winkelsatz 1	Winkelsatz 2
$\cos\nu_1 = r_{33} \qquad \nu_1 = \arccos(r_{33})$	$\cos\nu_2 = r_{33} \qquad \nu_2 = -\arccos(r_{33})$
$\tan\alpha_1 = \frac{r_{13}}{r_{23}}$ (Quadranten beachten)	$\tan\alpha_2 = \frac{-r_{13}}{-r_{23}}$ (Quadranten beachten)
$\tan\kappa_1 = \frac{r_{31}}{r_{32}}$ (Quadranten beachten)	$\tan\kappa_2 = \frac{-r_{31}}{-r_{32}}$ (Quadranten beachten)

Die Darstellung im KRAUS, S.18 beschrieb die Winkel ν und κ mit dem Sinus bzw. Kosinus, in denen Mehrdeutigkeiten in deren Umkehrfunktionen auftreten.
Da sich der terrestrische Winkelfall am ehesten zur Aufnahme von Fassaden eignet lässt sich hier eine einfache Bedingung für einen eindeutigen Winkelsatz finden. Die Nadirdistanz ν ist zwischen 0 bis 200 [gon] besonders gut vorstellbar, also wird der dazugehörige Winkelsatz verwendet.

$$\text{Bedingung: } \nu : 0 < \nu < \pi$$

4.2 Luftbildfall

$$R_{\omega\phi\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\kappa & -\cos\phi\sin\kappa & \sin\phi \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\phi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\phi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\phi \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\phi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\phi\sin\kappa & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.0)$$

(aus LUHMANN, S.37)

Winkelsatz 1		Winkelsatz 2	
$\sin\phi_1 = r_{13}$	$\phi_1 = \arcsin(r_{13})$	$\sin\phi_2 = r_{13}$	$\phi_2 = \pi - \arcsin(r_{13})$
$\tan\omega_1 = -\frac{r_{23}}{r_{33}}$	(Quadranten beachten)	$\tan\omega_2 = -\frac{-r_{23}}{-r_{33}}$	(Quadranten beachten)
$\tan\kappa_1 = -\frac{r_{12}}{r_{11}}$	(Quadranten beachten)	$\tan\kappa_2 = -\frac{-r_{12}}{-r_{11}}$	(Quadranten beachten)

Auch in dem Luftbildfall finden sich zwei Winkelsätze, die ein und dieselbe Aufnahmekonfiguration beschreiben. Im Gegensatz zu dem terrestrischen Winkelfall können aber beide Winkelfälle sinnvoll und vorstellbar sein.

Fall 1 Boden: Bedingung: $\phi : -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$

Fall 2 Himmel: Bedingung: $\phi : \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$

Fall 1 wird wohl in 90% der Fälle seine Anwendung finden, daher kann man diese Bedingung als Standard definieren.